

Grafički prikaz jedne klase jednadžbi s apsolutnim vrijednostima

MAJA STARČEVIĆ¹

Ako je zadana jednadžba nekog skupa u ravnini, taj skup u pravilu ne možemo posve precizno nacrtati samo na temelju nekih karakterističnih točaka. Iznimka je npr. jednadžba oblika $ax + by + c = 0$, gdje su $a, b, c \in \mathbb{R}$, $a^2 + b^2 \neq 0$. Takva jednadžba opisuje pravac, a za njegovo crtanje dovoljno je poznavati samo dvije točke koje zadovoljavaju jednadžbu. U radu [1] pokazano je kako se i skup zadan jednadžbom oblika

$$\sum_{i=1}^n c_i |a_i x + b_i| - y = 0, \quad (1)$$

pri čemu su $a_i, b_i, c_i \in \mathbb{R}$, $a_i, c_i \neq 0$, može nacrtati poznavajući samo nekoliko točaka koje zadovoljavaju jednadžbu.

Ponovimo ukratko postupak. Definiramo funkciju f s

$$f(x) = \sum_{i=1}^n c_i |a_i x + b_i|.$$

Neka je $\alpha_i = -\frac{b_i}{a_i}$, $i = 1, \dots, n$. Pretpostavljamo radi jednostavnosti zapisa da je $\alpha_i < \alpha_{i+1}$, $i = 1, \dots, n-1$. Tada je skup opisan jednadžbom (1) jednak grafu funkcije f i možemo ga nacrtati pomoću točaka $(\alpha_i, f(\alpha_i))$, $i = 1, \dots, n$ te točaka $(\alpha_0, f(\alpha_0))$ i $(\alpha_{n+1}, f(\alpha_{n+1}))$ takvih da vrijedi $\alpha_0 < \alpha_1$ i $\alpha_{n+1} > \alpha_n$. Skup je jednak uniji dužina kojima su krajnje točke $(\alpha_i, f(\alpha_i))$ i $(\alpha_{i+1}, f(\alpha_{i+1}))$ za $i = 1, \dots, n-1$, polupravca s početnom točkom $(\alpha_1, f(\alpha_1))$ koji prolazi točkom $(\alpha_0, f(\alpha_0))$ i polupravca s početnom točkom $(\alpha_n, f(\alpha_n))$ koji prolazi točkom $(\alpha_{n+1}, f(\alpha_{n+1}))$.

Sličan pristup želimo primijeniti i na skupove zadane jednadžbama oblika

$$\sum_{i=1}^n c_i |a_i x + b_i| = \sum_{j=1}^m f_j |d_j y + e_j|, \quad (2)$$

¹Maja Starčević, PMF – Matematički odsjek, Zagreb

pri čemu su $a_i, b_i, c_i, d_j, e_j, f_j \in \mathbb{R}$, $a_i, c_i, d_j, f_j \neq 0$.

Označimo s P skup točaka, odnosno uređenih parova (x, y) koji zadovoljavaju jednadžbu (2). Želimo odrediti neki skup točaka koji je podskup od P na temelju kojeg možemo rekonstruirati izgled cijelog skupa P .

Prvo definiramo $\alpha_i = -\frac{b_i}{a_i}$ za $i = 1, \dots, n$ te $\beta_j = -\frac{e_j}{d_j}$ za $j = 1, \dots, m$. Sada podijelimo ravninu pravcima $x = \alpha_i$ i $y = \beta_j$, $i = 1, \dots, n$, $j = 1, \dots, m$. Te ćemo pravce u nastavku zvati kritičnim pravcima. Nakon toga odredimo točke koje zadovoljavaju jednadžbu (2) i leže na kritičnim pravcima. Njih ćemo zvati kritičnim točkama.

Definiramo i funkcije određene lijevom i desnom stranom jednadžbe:

$$f(x) = \sum_{i=1}^n c_i |a_i x + b_i|,$$

$$g(y) = \sum_{j=1}^m f_j |d_j y + e_j|.$$

Da bismo odredili kritične točke na pravcu $x = \alpha_i$, tražimo sve y takve da je $g(y) = f(\alpha_i)$. Vrijednosti možemo ponekad lako očitati s grafa funkcije g . Da bismo nacrtali taj graf, dovoljno je odrediti $m + 2$ točke toga grafa kako je objašnjeno na početku rada. Za svaki tako dobiveni y ucrtavamo točku (α_i, y) .

Analogno tražimo kritične točke na pravcu $y = \beta_j$. Preciznije, tražimo sve x takve da je $f(x) = g(\beta_j)$. Za dobivene x ucrtavamo točke (x, β_j) .

Pravci $x = \alpha_i$ i $y = \beta_j$, ako su svi međusobno različiti, dijele ravninu na $(n + 1)(m + 1)$ skupova koji mogu biti ograničeni i neograničeni. Označimo uniju svih takvih skupova s Ω . Pritom pretpostavljamo da svaki skup iz Ω sadrži i svoj rub, odnosno pretpostavljamo da je zatvoren.

U nastavku ćemo objasniti kako se u svakom od skupova iz Ω , na temelju kritičnih točaka koje sadrži na svom rubu, mogu odrediti sve točke koje zadovoljavaju zadanu jednadžbu (2).

Neka je dakle S iz Ω . Primijetimo da se za sve točke $(x, y) \in S$ na isti način oslobađamo apsolutnih zagrada u jednadžbi te ju pritom pojednostavljujemo do jednadžbe oblika

$$Ax + By + C = 0, \quad (3)$$

za neke $A, B, C \in \mathbb{R}$.

Pritom, ako je $A = B = 0$, onda u slučaju da je $C = 0$ sve točke iz S zadovoljavaju jednadžbu (3), odnosno jednadžbu (2). Ako je $C \neq 0$, ne postoji točka iz S koja zado-

voljava jednadžbu (2).

Ako je barem jedan od brojeva A i B različit od nule, dobivamo jednadžbu nekog pravca te u S crtamo presjek toga pravca sa skupom S . Ako je S ograničen, odnosno pravokutnik, presjek tog pravca sa S je ili neprazan, ili točka koja je jednaka vrhu pravokutnika S , ili dužina koja se može podudarati s jednom stranicom pravokutnika ili imati krajnje točke na dvije različite stranice pravokutnika S . Ako je S neograničen, presjek je ili neprazan, ili točka koja je jednaka vrhu ruba skupa S , ili dužina, ili je presjek jednak polupravcu koji može pripadati rubu od S , te mu je pritom početna točka u vrhu tog ruba, ili može prolaziti kroz unutrašnjost od S , a početna mu je točka na rubu od S .

Presjek traženog skupa P i skupa S nacrtat ćemo stoga na temelju kritičnih točaka koje se nalaze na rubu skupa S . Preciznije, vrijede sljedeća svojstva:

1. Ako nema kritičnih točaka na rubu od S , onda je presjek neprazan.
2. Ako su sve točke ruba od S kritične točke, onda je presjek čitav S .
3. Ako kritične točke čine dužinu, onda je presjek jednak toj dužini.
4. Ako kritične točke čine polupravac, onda je presjek taj polupravac.
5. Ako se na rubu od S nalaze samo dvije kritične točke, presjek je dužina kojoj su to krajnje točke.
6. Ako je S ograničen i na rubu od S imamo samo jednu kritičnu točku, onda je ta točka presjek.
7. Ako je S neograničen i na njegovom rubu imamo samo jednu točku, onda imamo dvije mogućnosti; ili je samo ta točka presjek (moguće je samo ako se ta točka nalazi u vrhu ruba skupa S), ili je presjek polupravac koji počinje u toj kritičnoj točki i nije podskup ruba skupa S . Stoga moramo provjeriti postoji li neka točka iz unutrašnjosti od S koja pripada P . Konkretno, odaberemo proizvoljnu odgovarajuću koordinatu točke skupa S te iz jednadžbe (2) pokušamo naći drugu koordinatu. Koordinatu odabiremo tako da pripadni polupravac ne siječe još neki od kritičnih pravaca jer bismo onda imali dvije kritične točke na rubu skupa S .

Prethodno opisani postupak pokazat ćemo na nekoliko primjera.

Primjer 1. Nacrtat ćemo skup zadan jednadžbom

$$|x - 2| = |y - 3|.$$

Rješenje.

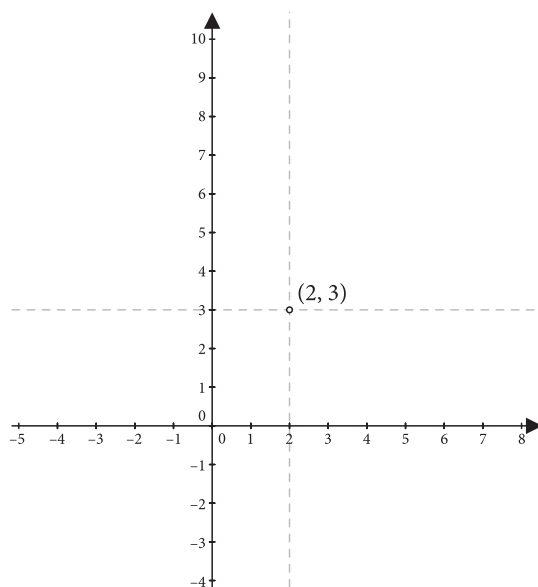
Prvo primijetimo da imamo dva kritična pravca $x = 2$ i $y = 3$. Prema tome, skup Ω je unija sljedećih skupova:

$$(-\infty, 2] \times (-\infty, 3], (-\infty, 2] \times [3, \infty), [2, \infty) \times (-\infty, 3], [2, \infty) \times [3, \infty).$$

Tražimo prvo kritične točke na pravcu $x = 2$. Iz jednadžbe slijedi da je $|y - 3| = 0$, pa je $y = 3$. Dakle, $(2, 3)$ je jedna kritična točka zadane jednadžbe.

Tražimo i kritične točke na pravcu $y = 3$. Sada iz jednadžbe dobivamo $|x - 2| = 0$ odnosno $x = 2$ te opet dobivamo točku $(2, 3)$.

Dakle, $(2, 3)$ jedina je kritična točka (slika 1) i nalazi se u vrhu ruba svakog od skupova iz Ω .

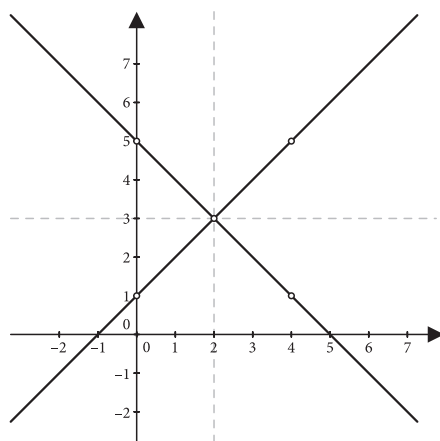


Slika 1.

U svakom od skupova iz Ω prema svojstvu 7. crtamo ili točku $(2, 3)$ ili polupravac koji počinje u toj točki. Ispitat ćemo stoga postoji li u tim skupovima još neka točka koja zadovoljava zadanu jednadžbu.

Odaberimo npr. $x = 0$. Tražimo prema tome y takav da je $|y - 3| = 2$. Lako je vidjeti da je tada $y = 1$ ili $y = 5$. Neka je sada $x = 4$. Imamo opet $|y - 3| = 2$, što opet vrijedi za $y = 1$ ili $y = 5$.

Spojimo li kritičnu točku s dobivenim točkama $(0, 1)$, $(0, 5)$, $(4, 1)$ i $(4, 5)$, dobit ćemo četiri polupravca i time je zadani skup točaka određen (slika 2). Lako je vidjeti da se taj skup zapravo sastoji od dva pravca, $y = x + 1$ i $y = -x + 5$.



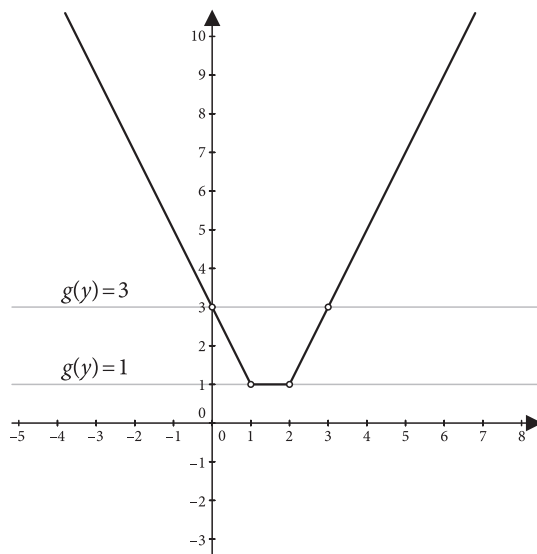
Slika 2.

Primjer 2. Sada crtamo skup zadan s

$$|x-1|+|x-2|=|y-1|+|y-2|.$$

Rješenje.

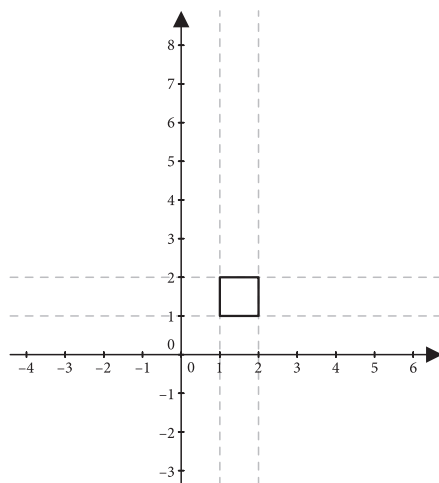
Podijelimo ravninu kritičnim pravcima $x = 1$, $x = 2$, $y = 1$, $y = 2$. Prvo tražimo sve točke zadanog skupa na pravcu $x = 1$. Uvrštavanjem u jednadžbu skupa dobivamo $|y-1|+|y-2|=1$. Nacrtamo graf funkcije $g(y)=|y-1|+|y-2|$ (slika 3), pri čemu smo istaknuli točke koje smo koristili za crtanje grafa. S grafa možemo očitati da jednakost $g(y)=1$ vrijedi za $y \in [1, 2]$. I za $x = 2$ dobivamo istu jednakost pa konačno na dva promatrana kritična pravca dobivamo po jednu dužinu sastavljenu od kritičnih točaka. Preciznije, radi se o dužinama $\{1\} \times [1, 2]$ i $\{2\} \times [1, 2]$.



Slika 3.

Analogno, uvrštavanjem $y = 1$, $y = 2$ dobivamo $|x - 1| + |x - 2| = 1$, iz čega očitavanjem na analognom grafu slijedi $x \in [1, 2]$. Prema tome, i sve točke dužina $[1, 2] \times \{1\}$ i $[1, 2] \times \{2\}$ kritične su točke jednadžbe.

Konačno zaključujemo da kritične točke čine rub kvadrata $[1, 2] \times [1, 2]$ (slika 4) pa čitav kvadrat, prema svojstvu 2., pripada traženom skupu P .



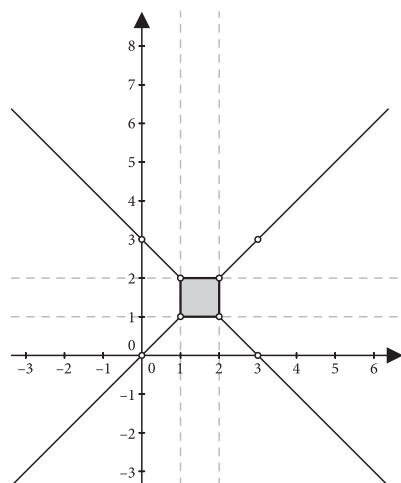
Slika 4.

Nadalje, skup kritičnih točaka koje pripadaju skupu $(-\infty, 1] \times [1, 2]$ iz Ω je dužina $\{1\} \times [1, 2]$ pa je ona presjek tog skupa s P (prema svojstvu 3.). Analogno je to dužina $[1, 2] \times \{1\}$ za skup $[1, 2] \times (-\infty, 1]$, dužina $\{2\} \times [1, 2]$ za skup $[2, \infty) \times [1, 2]$ te dužina $[1, 2] \times \{2\}$ za skup $[1, 2] \times [2, \infty)$.

Preostaje naći presjek skupa P s neograničenim skupovima iz Ω . Svaki takav skup S sadrži samo jednu kritičnu točku koja se nalazi u vrhu ruba tog skupa. Prema svojstvu 7. ili je ta kritična točka presjek skupova S i P ili je presjek polupravac koji započinje u toj kritičnoj točki, i nije podskup ruba od S . Dakle, potrebno je ispitati postoji li neka točka u unutrašnjosti skupa S koja je i u P .

Uvrstimo npr. $x = 0$ u zadanu jednadžbu. Imamo $g(y) = |y - 1| + |y - 2| = 3$ pa iz pripadnog grafa (slika 3) očitamo da su rješenja $y = 0$ i $y = 3$. Iste vrijednosti dobivamo i za $x = 3$. Prema tome, točke $(0, 0)$, $(0, 3)$, $(3, 0)$, $(3, 3)$ pripadaju skupu P . Dakle, u svakom neograničenom skupu iz Ω odredili smo po još jednu točku iz P pa u tom skupu crtamo polupravac.

Konačno, traženi skup je unija kvadrata i četiriju polupravaca (slika 5).



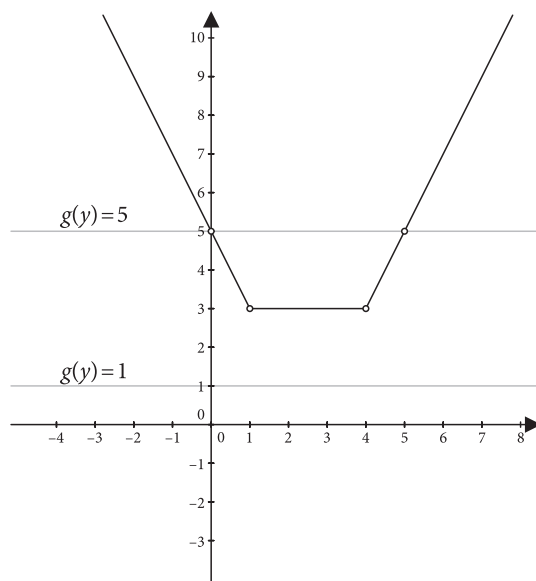
Slika 5.

Primjer 3. Opisat ćemo i skup točaka zadan s

$$|x-2| + |x-3| = |y-1| + |y-4|.$$

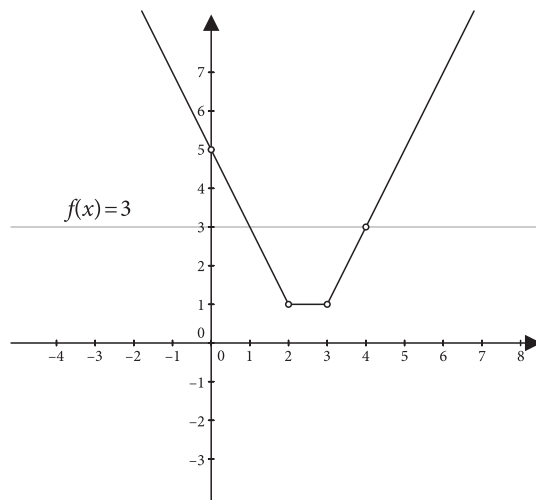
Rješenje.

Kritični pravci su $x = 2$, $x = 3$ te $y = 1$ i $y = 4$. Za $x = 2$ i $x = 3$ imamo $g(y) = |y-1| + |y-4| = 1$. Kako jednačba $g(y) = 1$ nema rješenja (slika 6), na tim kritičnim pravcima nema kritičnih točaka.



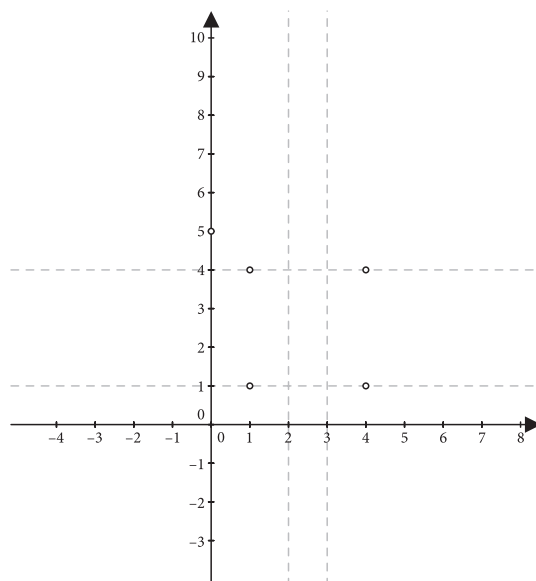
Slika 6.

S druge strane za $y = 1$ i $y = 4$ imamo $f(x) = |x - 2| + |x - 3| = 3$, pa imamo $x = 1$ i $x = 4$ (slika 7).



Slika 7.

Dakle, kritične točke jednadžbe su točke $(1, 1)$, $(1, 4)$, $(4, 1)$, $(4, 4)$ (slika 8).



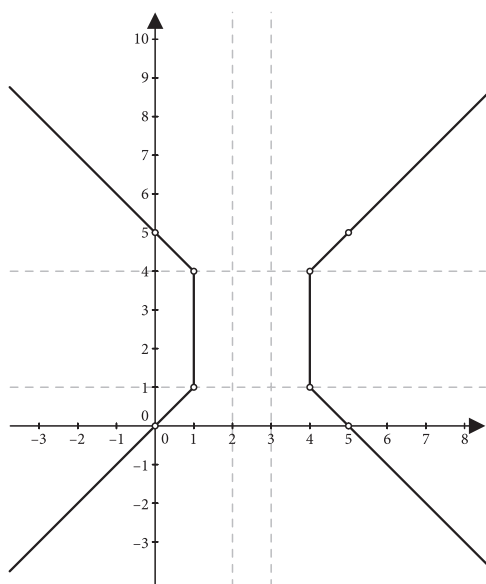
Slika 8.

Dakle, u tri skupa iz Ω koji se nalaze između pravaca $x = 2$ i $x = 3$ nemamo kritičnih točaka pa je prema tome njihov presjek sa skupom P neprazan (svojstvo 1.).

U skupovima $(-\infty, 2] \times [1, 4]$ i $[3, \infty) \times [1, 4]$ imamo po dvije kritične točke pa je presjek svakog od njih s traženim skupom P dužina (svojstvo 5.). Kod prvog skupa radi se o dužini $\{1\} \times [1, 4]$, a kod drugog o dužini $\{4\} \times [1, 4]$.

U svakom preostalom neograničenom skupu S iz Ω imamo po jednu kritičnu točku koja se ne nalazi u vrhu ruba skupa S pa je u njemu prema svojstvu 7. potrebno nacrtati polupravac. U skupu S dakle tražimo još jednu točku koja zadovoljava zadanu jednadžbu. Očito je da nema smisla tražiti točke (x, y) takve da je $1 < x < 4$. Pokušajmo s $x = 0$. Imamo $|y - 1| + |y - 4| = 5$ pa je $y = 0$ i $y = 5$ (slika 6). Za $x = 5$ opet je $|y - 1| + |y - 4| = 5$ te je također $y = 0$ i $y = 5$. Dakle, ucrtavanjem točaka $(0, 0)$, $(0, 5)$, $(5, 0)$, $(5, 5)$ možemo odrediti tražene polupravce.

Konačno, skup P sastoji se od dviju dužina i četiriju polupravaca (slika 9).



Slika 9.

Primjer 4. Određujemo točke koje zadovoljavaju jednadžbu

$$2|x - 1| + |x - 3| + |x + 1| = 2|y - 1| + |y - 3|.$$

Rješenje.

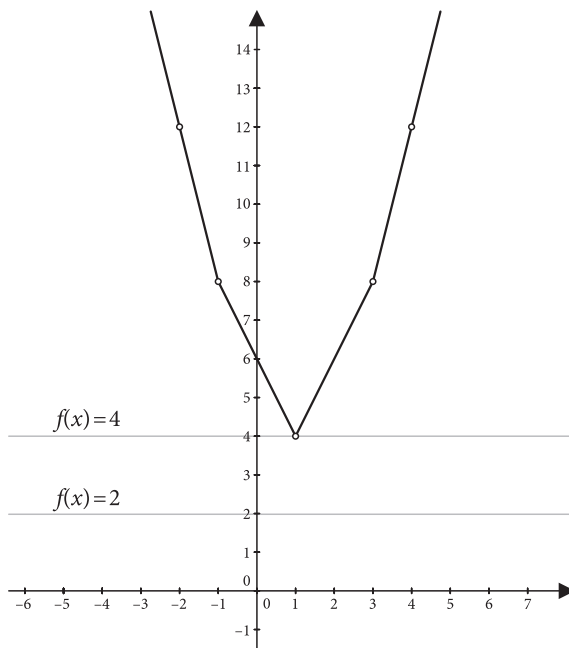
Sada podijelimo ravninu kritičnim pravcima $x = -1$, $x = 1$, $x = 3$ te $y = 1$ i $y = 3$. Kao i prije, na tim pravcima tražimo kritične točke jednačbe.

Skiciramo graf funkcije f pridružene lijevoj (slika 10) te graf funkcije g pridružene desnoj strani (slika 11) jednačbe te na njima očitavamo vrijednosti.

Prvo, za $x = -1$ iz zadane jednačbe dobivamo $g(y) = 8$ pa imamo $y = \frac{13}{3}$ i $y = -1$.

Nadalje, za $x = 1$ je $g(y) = 4$ pa je $y = \frac{1}{3}$ i $y = 3$.

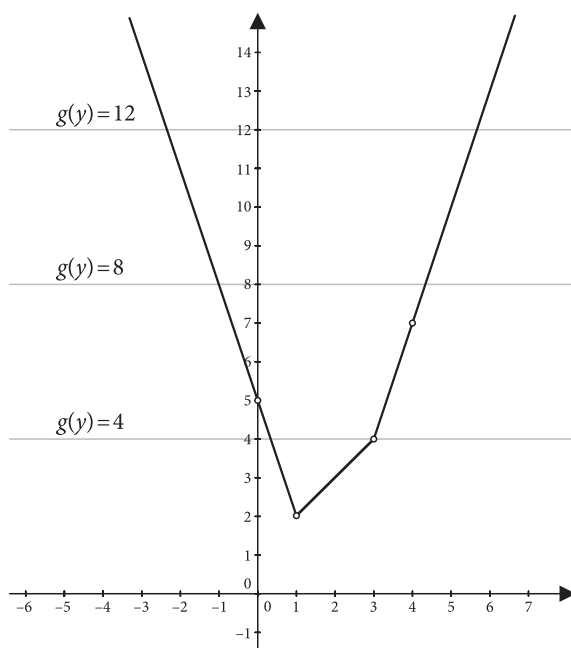
Konačno, za $x = 3$ je $g(y) = 8$ pa je opet $y = \frac{13}{3}$ i $y = -1$.



Slika 10.

S druge strane za $y = 1$ je $f(x) = 2$, što nema rješenja.

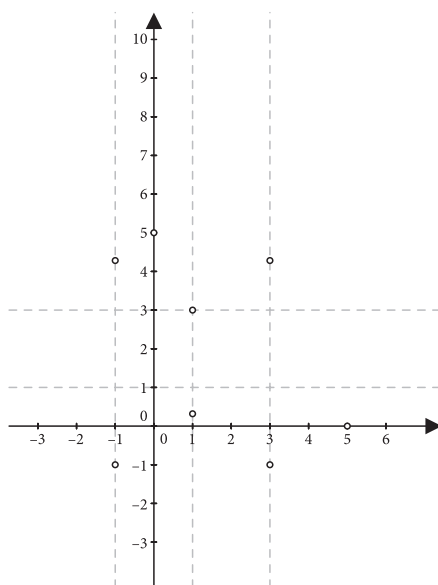
I napokon, za $y = 3$ je $f(x) = 4$, te je $x = 1$.



Slika 11.

Sada u koordinatnom sustavu crtamo dobivene kritične točke

$$\left(-1, \frac{13}{3}\right), (-1, -1), \left(1, \frac{1}{3}\right), (1, 3), \left(3, \frac{13}{3}\right), (3, -1) \text{ (slika 12).}$$

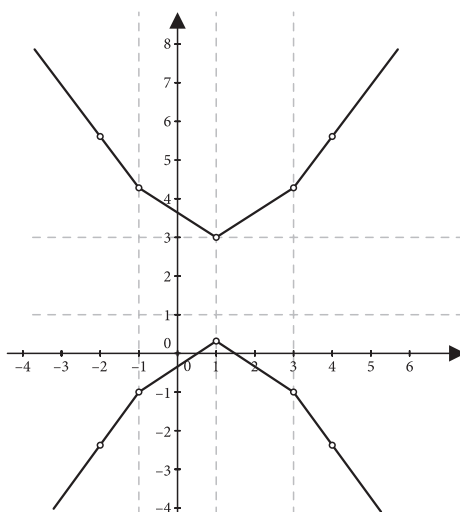


Slika 12.

U dva ograničena skupa iz Ω imamo samo po jednu kritičnu točku, pa prema svojstvu 6. u njima crtamo samo te točke. U neograničenim skupovima iz Ω koji se nalaze između pravaca $x = -1$ i $x = 3$ imamo po dvije kritične točke pa u njima crtamo dužine kojima su te točke krajnje (svojstvo 5.). Imamo i dva neograničena skupa iz Ω između pravaca $y = 1$ i $y = 3$ koji ne sadrže kritične točke pa u njima ne crtamo ništa (svojstvo 1.). U ostalim skupovima imamo po jednu kritičnu točku koja nije u vrhu ruba skupa pa u njima moramo crtati polupravce (svojstvo 7.). Dakle, u tim skupovima trebamo odrediti po još jednu točku koja zadovoljava jednadžbu. Nađimo te točke npr. za $x = -2$ i $x = 4$. U oba je slučaja $g(y) = 12$ pa je $y = \frac{17}{3}$ i $y = -\frac{7}{3}$.

Dakle, traženi polupravci su, osim kritičnim točkama, određeni i točkama $\left(-2, \frac{17}{3}\right)$, $\left(-2, -\frac{7}{3}\right)$, $\left(4, \frac{17}{3}\right)$, $\left(4, -\frac{7}{3}\right)$.

Konačno, traženi skup izgleda kao na slici 13.



Slika 13.

Literatura

1. D. Jelenčić, M. Starčević: Grafičko rješavanje sustava jednadžbi s apsolutnim vrijednostima, Poučak, 66, 14-23 (2016.).